数理解析研究所講究録
224巻 1974年 27-79

Applications of Nagumo-Hukuhara theory on the boundary value problem for nonlinear differential equations to the boundary layer equation and the nonlinear Bessel equation.

都立大 理　岩野正宏

まえがき.

非線型 Bessel 方程式に関する問題は 次の境界値問題で, これは超伝導現象の研究に現われた問題である:

$$
(A)\begin{cases} y'' = -x^{-1}y' + \nu^2 x^{-2} y - y + y^3 = f(x, y, y') \\ y(0) = 0, \quad y(\infty) = 1 \\ 0 < y(x) < 1 \quad \text{for } 0 < x < \infty, \end{cases}
$$

$\nu > 0$ は パラメーターである。この境界値問題の解の存在と一意性とは すでに逸高惟倫氏によって解決されている。ここでは やがて説明する全く異った方法で 解の存在だけを証明する。

境界層の方程式に関する問題は 次の境界値問題で, 粘性流体の境界層の研究に現われた問題である:

$$
(1) \qquad z''' + 2zz'' + 2\lambda(1 - z'^2) = 0,
$$

$$
z(0) = 0, \qquad z'(0) = 0
$$

$$\zeta'(\infty)=1.$$

$\lambda<0$ は パラメーター である。独立変数は t, $'$ は導関数.

本研究の目的は この境界値問題の解が存在するかどうかを調べることである。Hartman 氏や Serrin 氏 などの研究にもかかわらず 私の知る限りでは まだ解が存在するかどうかはわかっていない. この問題に関する最新の結果は, 1955 年 Iglisch と Kemnitz 両氏の共著の論文で発表されたものである:

与えられた境界条件を少し変えて 新しい境界条件

$$\zeta(0)=\alpha,\quad \zeta'(0)=\beta,\quad \zeta'(\infty)=1,\qquad 0\leqq\beta<1$$

を考える.

" $0\leqq\beta<1$, $\lambda<0$ なる β,λ を任意に固定する. λ,β によって定まる或る number $A\equiv A(\lambda,\beta)$ と $A\leqq\alpha$ において定義された狭義単調増加関数 $\gamma(\alpha)$ (ただし $\gamma(A)=0$) とが存在し, ($\alpha,\beta,\zeta''(0)$) を 初期値とする解が $t=+\infty$ まで接続可能 かつ $\zeta'(t)\to 1$ as $t\to\infty$ となるための必要かつ十分条件は $\zeta''(0)$ が 不等式

$$0\leqq\zeta''(0)\leqq\gamma(\alpha)$$

を満足することである。"

しかしながら, $A(\lambda,\beta)$ の決め方は 解析的であるために, $A\leqq 0$ となるかどうかは不明である. したがって この存在

定理からは 流体力学で解の存在を要請されている境界値問題に解が存在するかどうかの判定はできない。

Hartman 氏は "$z''(0)=\gamma(\alpha)$ となる解は、$t\to+\infty$ のとき $z'(t)$ は指数関数の order で 1 に近づく。それ以外の解に対しては、$z'(t)$ は $t\to\infty$ のとき power の order で 1 に近づく" ことを証明した。

λの値は負であるが、実験的には λ が $-0.199<\lambda<0$ のときに 解の存在がわかればよい。というのは $\lambda=-0.199$ のとき いわゆる separation という現象が起って 境界層が剥離されることになるからである。

境界層の方程式は3階であるが、独立変数を陽に含んでいないので、2階の方程式に変換することができる。このことについて説明をしよう。

z', z'', z''' は t の関数 z の 1階, 2階, 3階 の導関数である。z' を z の関数と考えれば

$$z''=\frac{dz'}{dt}=\frac{dz'}{dz}z',$$

$$z'''=\frac{d}{dz}\left(\frac{dz'}{dz}z'\right)\cdot z'=z'^2\frac{d^2z'}{dz^2}+z'\left(\frac{dz'}{dz}\right)^2$$

をえる。よって与えられた 3階の方程式は

(2) $$z'\left\{z'\frac{d^2z'}{dz^2}+\left(\frac{dz'}{dz}\right)^2\right\}+2zz'\frac{dz'}{dz}+2\lambda(1-z'^2)=0$$

となる. $t=0$ における初期値を

$$z(0)=z_0,\quad z'(0)=z_0',\ z''(0)=z_0'',\ z'''(0)=z_0'''$$

と書くことにする. $z(0)=z'(0)=0$ より

$$z_0=0,\quad z_0'=0.$$

これらの値を与方程式に代入すれば

$$z_0'''=-2\lambda>0$$

をえる. $z'(t)$ を z の関数と考えて $\displaystyle\lim_{z\to0}\frac{z'}{z^\alpha}$ が存在しかつ 0 と異なる値をとるような $\alpha>0$ を探してみる.

$$\frac{dz'}{dz}=\frac{z''}{z'}\quad,\quad\frac{dz''}{dz}=\frac{z'''}{z'}$$

であるから, $l'Hospital's\ rule$ により

$$\lim_{z\to0}\frac{z'}{z^\alpha}=\lim_{z\to0}\frac{z''\cdot z'^{-1}}{\alpha z^{\alpha-1}}$$

$$\therefore\ \left(\lim_{z\to0}\frac{z'}{z^\alpha}\right)^2=\lim_{z\to0}\frac{z''}{\alpha z^{2\alpha-1}}\qquad\text{when}\ \lim_{z\to0}\frac{z'}{z^\alpha}\neq0$$

よって $z_0''\neq0$ のとき, $\alpha=\frac{1}{2}$ にとって

$$\lim_{z\to0}\frac{z'}{\sqrt{z}}=\sqrt{2z_0''}\qquad\text{when}\ z_0''\neq0.$$

$z_0''=0$ のときは, $z_0'''>0$ を考慮して,

$$\left(\lim_{z\to 0}\frac{z'}{z^{\alpha}}\right)^2 = \lim_{z\to 0}\frac{z'''\cdot z'^{-1}}{\alpha(2\alpha-1)z^{2\alpha-2}},$$

$$\therefore \left(\lim_{z\to 0}\frac{z'}{z^{\alpha}}\right)^3 = \lim_{z\to 0}\frac{z'''}{\alpha(2\alpha-1)z^{3\alpha-2}} \qquad \text{when } \lim_{z\to 0}\frac{z'}{z^{\alpha}}\neq 0.$$

よって $\alpha=\frac{2}{3}$ にとることにより,

$$\lim_{z\to 0}\frac{z'}{\sqrt[3]{z^2}} = \sqrt[3]{\frac{9}{2}z_0'''} = \sqrt[3]{-9\lambda} \qquad \text{when } z_0''=0.$$

$z'(\infty)=1$ より,

$z\to\infty$ のとき $z'\to 1$.

よって 新しい方程式(2) に対する境界条件は,

$$\lim_{z\to 0}\frac{z'}{\sqrt{z}} = \sqrt{2z_0''} \qquad \text{when } z_0''\neq 0,$$

$$\lim_{z\to\infty} z' = 1$$

または

$$\lim_{z\to 0}\frac{z'}{\sqrt[3]{z^2}} = \sqrt{-9\lambda} \qquad \text{when } z_0''=0,$$

$$\lim_{z\to\infty} z' = 1$$

となる。

2階の境界値問題に帰着させるために,

$$y = z'^2, \qquad x = z$$

をそれぞれ従属変数および独立変数にとれば，方程式(2)および満たする境界条件は

$$\sqrt{y}\,\frac{d^2y}{dx^2} + 2x\frac{dy}{dx} + 4\lambda(1-y) = 0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{y}{x} = 2z_0'' \qquad \text{when } z_0'' \neq 0$$

$$\lim_{x\to\infty} y = 1$$

or

$$\sqrt{y}\,\frac{d^2y}{dx^2} + 2x\frac{dy}{dx} + 4\lambda(1-y) = 0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{y}{\sqrt[3]{x^4}} = -9\lambda \qquad \text{when } z_0'' = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} y = 1$$

となる.

両者の場合をまとめて

$$(\mathrm{B})\begin{cases} y'' = -\dfrac{1}{\sqrt{y}}\left(2xy' + 4\lambda(1-y)\right) \equiv f(x, y, y') \\ y(0) = 0, \qquad y(\infty) = 1 \\ 0 < y(x) < 1 \quad \text{for } 0 < x < \infty \end{cases}$$

なる境界値問題がえられたことになる.

いまから説明する方法では，境界値問題 (A) に関しては，すべての $\nu>0$ の値に対して解の存在（ただし一意性は全然考えないことにする）が証明できる．また境界値問題 (B) に関しては，λ が

$$-\frac{3}{2}\lambda(3-2\lambda)(5-3\lambda)<1$$

のとき，したがって $-0.042\leqq\lambda<0$ のとき，Algebraic Type の解（すなわち $x\to\infty$ のとき $y(x)$ は x の power の order で 1 に近づく）の存在が，また λ が $-0.059\leqq\lambda<0$ のとき，Exponential Type の解（すなわち $x\to\infty$ のとき $y(x)$ は指数関数の order で 1 に近づく）の存在が証明できたように思われる。

この結果が正しいとしても，物理実験の結果を保証するには λ の範囲があまりにも狭すぎる。改良の見込みは十分あると思われるが，初等的ではあるけれどかなり面倒な計算を必要とする．改良の方針については，一通り説明を終えた段階で述べる。

これらの計算結果の check にさいし，慶應大学の齋藤利弥，石井一平の両氏に大へんお世話になった。福原先生には，彼の理論について私の理解できなかった若干の箇所を教えて

載いた。これら3人の方々のご好意に感謝する。

§1. 南雲型の存在定理

1939年 南雲氏は 2階の非線型常微分方程式の境界値問題の解の存在に関して すぐれた結果をえられた。この結果は, 彼の有名な解の単独条件とともに, 今日でも しばしば引用されている。 " 2階非線型常微分方程式

$$y'' = f(x, y, y')$$

の右辺の関数 $f(x, y, z)$ は Bergman 領域

$$a \leqq x \leqq b,$$
$$\underline{\omega}(x) \leqq y \leqq \overline{\omega}(x),$$
$$\underline{\Omega}(x, y) \leqq z \leqq \overline{\Omega}(x, y)$$

において (x, y, z) の関数として連続である。

$\underline{\omega}(x)$, $\overline{\omega}(x)$ は $a \leqq x \leqq b$ において 2回連続微分可能かつ $\underline{\omega}(a) = \overline{\omega}(a) = A$. $\underline{\Omega}(x, y)$, $\overline{\Omega}(x, y)$ は

$$a \leqq x \leqq b, \quad \underline{\omega}(x) \leqq y \leqq \overline{\omega}(x)$$

において 連続な一階の偏導関数をもつ. しかも 次の不等式が満足される:

$$(1.1) \quad \begin{cases} \underline{\omega}''(x) \geqq f(x, \underline{\omega}(x), \underline{\omega}'(x)) \\ \overline{\omega}''(x) \leqq f(x, \overline{\omega}(x), \overline{\omega}'(x)) \end{cases} \qquad a \leqq x \leqq b$$

$$\begin{aligned}&\underline{\Omega}(x, \underline{\omega}(x)) \leqq \underline{\omega}'(x) \leqq \overline{\Omega}(x, \underline{\omega}(x)) \\ &\underline{\Omega}(x, \overline{\omega}(x)) \leqq \overline{\omega}'(x) \leqq \overline{\Omega}(x, \overline{\omega}(x))\end{aligned} \qquad a \leqq x \leqq b$$

$$(1.2)\begin{cases} f(x,y,\underline{\Omega}(x,y)) - \underline{\Omega}_x(x,y) - \underline{\Omega}_y(x,y)\,\underline{\Omega}(x,y) > 0 \\ f(x,y,\overline{\Omega}(x,y)) - \overline{\Omega}_x(x,y) - \overline{\Omega}_y(x,y)\,\overline{\Omega}(x,y) < 0 \end{cases}$$

$$\text{for} \quad a \leqq x \leqq b, \quad \underline{\omega}(x) \leqq y \leqq \overline{\omega}(x) .$$

これらの条件のもとに、 $\underline{\omega}(b) \leqq B \leqq \overline{\omega}(b)$ となる 任意の B に対して、境界値問題

$$y'' = f(x, y, y')$$
$$y(a) = A, \quad y(b) = B$$

の解が、 $a \leqq x \leqq b$, $\underline{\omega}(x) \leqq y \leqq \overline{\omega}(x)$ 内に 存在する。"

仮定 (1.1) と (1.2) の役割を示すために この定理の証明の概略を述べよう。

解が存在することを仮定すれば、 $y(x)$, $z(x) = \frac{dy(x)}{dx}$ は次の積分方程式を満足する： まず

$$G(x,t) = \begin{cases} \dfrac{(b-x)(t-a)}{b-a} & a \leqq t \leqq x \leqq b \\[2ex] \dfrac{(b-t)(x-a)}{b-a} & a \leqq x \leqq t \leqq b \end{cases}$$

とおけば,

$$(1.3)\quad \begin{aligned} y(x) &= \frac{A(b-x)+B(x-a)}{b-a} - \int_a^b G(x,t)\, f(t, y(t), z(t))\, dt \\ z(x) &= \frac{B-A}{b-a} - \int_a^b \frac{\partial G}{\partial x}(x,t)\ f(t, y(t), z(t))\, dt \ . \end{aligned}$$

このことは, 直接計算によって, $y'(x)=z(x)$, $z'(x)=f(x,y(x),z(x))$ となることからわかる.

この積分方程式に解の存在することを証明しようとするとき, 積分記号のなかの関数 $f(x,y,z)$ の y,z の範囲が制限されていることは不便である. 次のようにして この $f(x,y,z)$ に対して $f^*(x,y,z)$ をつくる:

$\underline{\omega}(x) \leqq y \leqq \overline{\omega}(x)$ のとき

$$f_1^*(x,y,z) = \begin{cases} f(x,y,\overline{\Omega}(x,y)) & \text{for } z > \overline{\Omega}(x,y) \\ f(x,y,z) & \text{for } \underline{\Omega}(x,y) \leqq z \leqq \overline{\Omega}(x,y) \\ f(x,y,\underline{\Omega}(x,y)) & \text{for } z < \underline{\Omega}(x,y) \end{cases}$$

とおけば, $f_1^*(x,y,z)$ は

$$a \leqq x \leqq b,\quad \underline{\omega}(x) \leqq y \leqq \overline{\omega}(x),\quad -\infty < z < +\infty$$

において定義され しかも

$$\max f(x,y,z) = \max f_1^*(x,y,z).$$

$\overline{\omega}(x) < y$ のとき

$$f^*(x,y,z) = f_1^*(x, \overline{\omega}(x), z) + \frac{y - \overline{\omega}(x)}{1 + y - \overline{\omega}(x)},$$

$y < \underline{\omega}(x)$ のとき

$$f^*(x,y,z) = f_1^*(x, \underline{\omega}(x), z) - \frac{\underline{\omega}(x) - y}{1 + \underline{\omega}(x) - y},$$

$\underline{\omega}(x) \leqq y \leqq \overline{\omega}(x)$ のとき

$$f^*(x,y,z) = f_1^*(x,y,z)$$

とおく。 このようにして定義された関数 $f^*(x,y,z)$ は

$$a \leqq x \leqq b, \quad -\infty < y < +\infty, \quad -\infty < z < +\infty$$

において 連続 かつ 有界となる:

$$|f^*(x,y,z)| \leqq M$$

f の代りに f^* でおきかえた積分方程式

$$y(x) = \frac{A(b-x) + B(x-a)}{b-a} - \int_a^b G(x,t)\, f^*(t, y(t), z(t))\, dt$$

(1.4)

$$z(x) = \frac{B-A}{b-a} - \int_a^b \frac{\partial G}{\partial x}(x,t)\, f^*(t, y(t), z(t))\, dt$$

を考える。 $a \leqq x \leqq b$ で 連続かつ一様に有界な関数 $y(x)$, $z(x)$;

$$|y(x)| \leqq H, \quad |z(x)| \leqq H$$

の pair $\{y(x), z(x)\}$ の全体から成る関数の族を $\mathfrak{F}$ とする．積分

$$Y(x) = \frac{A(b-x)+B(x-a)}{b-a} - \int_a^b G(x,t)\, f^*(t, y(t), z(t))\, dt,$$

$$Z(x) = \frac{B-A}{b-a} - \int_a^b \frac{\partial G}{\partial x}(x,t)\, f^*(t, y(t), z(t))\, dt$$

によって $\{Y(x), Z(x)\}$ を定義し，

$$T: \{y(x), z(x)\} \longrightarrow \{Y(x), Z(x)\}$$

によって写像 T を定義する．$Y(x)$, $Z(x)$ は連続関数であるから，H を適当に定めれば

$$|Y(x)| \leqq H, \quad |Z(x)| \leqq H$$

となることが証明され，Schauder 型の不動点定理によって (1.4) は解をもつことになる．少し計算すれば H として

$$H = \max\left\{\frac{(b-a)^2}{8}M + |A|,\ \frac{(b-a)^2}{8}M + |B|,\ \frac{|B-A|}{b-a} + \frac{b-a}{4}M\right\}$$

をとればよいことがわかる．

このようにしてえられた解 $\{y(x), z(x)\}$ は境界値問題

$$y'' = f^*(x, y, y')$$
$$y(a) = A, \quad y(b) = B$$

の解である．不等式 (1.1) は，$y(x)$ は

$$\underline{\omega}(x) \leqq y(x) \leqq \overline{\omega}(x) \quad , \quad a \leqq x \leqq b$$

を満足し，　不等式 (1.2) は　$y'(x)$ は

$$\underline{\Omega}(x, y(x)) \leqq y'(x) \leqq \overline{\Omega}(x, y(x))$$

を満足することの証明に用いられる。したがって $y(x)$ は与えられた境界値問題の解になる。

南雲氏の存在定理は　安香氏によって　もう少し一般な形で述べられている。

Remark **1**

南雲氏は，　$\omega(x) \in$ class C^2 と仮定しているが，$\omega(x)$ に関する条件は　次のような　もっとゆるい条件で置き換えられる：“$\underline{\omega}(x)$, $\overline{\omega}(x)$ は　$a \leqq x \leqq b$ において連続　かつ　$a \leqq x \leqq b$ なる任意の点 $x = \xi$ において，ξを含む或る区間 I_ξ において定義された class C^2 に属する関数 $\underline{\gamma}(x)$, $\overline{\gamma}(x)$ で

$$\underline{\gamma}(x) \leqq \underline{\omega}(x) \quad \text{on } I_\xi$$
$$\underline{\gamma}''(x) \geqq f(x, \underline{\gamma}(x), \underline{\gamma}'(x)) \quad \text{on } I_\xi \; ,$$

$$\overline{\omega}(x) \leqq \overline{\gamma}(x) \quad \text{on } I_\xi \; ,$$
$$\overline{\gamma}''(x) \leqq f(x, \overline{\gamma}(x), \overline{\gamma}'(x)) \quad \text{on } I_\xi$$

となるものが存在する。” 安香氏は，このような $\underline{\omega}(x)$, $\overline{\omega}(x)$ を

sub-function, super-function と名付けている。

Remark 2

$\underline{\Omega}(x,y)$, $\overline{\Omega}(x,y)$ は class C^1 に属すると仮定されてある。この条件も，次のようなゆるい条件で置き換えられる："$\underline{\Omega}(x,y)$, $\overline{\Omega}(x,y)$ は，$a \leq x \leq b$, $\underline{\omega}(x) \leq y \leq \overline{\omega}(x)$ において連続 かつ $\underline{\omega}(x) \leq y(x) \leq \overline{\omega}(x)$ をみたす 2回連続微分可能な任意の $y(x)$ に対して

$$f(x, y(x), \underline{\Omega}(x, y(x))) - \frac{d}{dx}\underline{\Omega}(x, y(x)) \geq 0$$

$$f(x, y(x), \overline{\Omega}(x, y(x))) - \frac{d}{dx}\overline{\Omega}(x, y(x)) \leq 0$$

を満足する" この条件も安香氏による。

Remark 3 南雲型の存在定理を目的とする二つの境界値問題 (A), (B) に応用するときは，少し改良しなければならない。その理由は

1° 区間 $a \leq x \leq b$ は 無限区間 $0 \leq x \leq \infty$ である

2° $f(x, y, z)$ は 特異性をもっている.

ために 少し面倒なことが生ずるからである。

区間が有限区間であっても 無限区間であっても 南雲の存在定理において仮定されている $\underline{\omega}(x)$, $\overline{\omega}(x)$, $\underline{\Omega}(x,y)$,

$\Omega(x,y)$ のまんぞくする不等式さえ成立すれば，少くとも一つは境界値問題の解が存在することを示すためには，福原型の存在定理は極めて有効である。

§2. 福原型の存在定理

1940年の前後に南雲，岡村両氏によって2階常微分方程式の二点境界値問題に関し，beautiful な結果がえられた。南雲氏の結果は §1 に紹介したが。~~文献は~~ 南雲（函数方程式 No 5 (1939) 27-34, No 6 (1939) 37-44）岡村（函数方程式 No 27 (1941) 27-35, No 30 (1941) 14-19, No 31 (1942) 32-40），また Knobloch は 1965年 Journal of D. Equations 1 (1965) 1-26 に南雲と同じような結果を発表している。福原氏は Kneser の性質を用いて，境界における条件のみから（したがってある条件を満足するように特殊な領域を探さなければならないが）解の存在定理を証明することを試み，ついに南雲，岡村，Knobloch の結果を統一的に証明する全く新しい方法を考案された。先生の original な証明には難解な部分があるので他日証明をわかりやすくしたものをどこかの雑誌に発表する予定である。ここでは一応存在定理だけを述べるだけにする。

いろんな形の存在定理を統一的に取り扱うために，まず第一に，ある条件を満足する関数の族 F（これは (x,y,z)-space における グラフ で，$y''=f(x,y,y')$ の解 $y(x)$ のつくる グラフ $(x, y(x), y'(x))$ と思えばよい）を考える。ある条件とは，$f(x,y,z)$ が コンパクト集合 Ω で連続な場合に その解の集合によって満足されている性質を とりあげて それらを 関数族 F の満足する条件として仮定する.

<u>公理 1°</u> おのおのの関数 は real line R^1 上のコンパクトな区間（とくに一点であってもよい）から R^n への連続写像である。ただし 関数が定義される区間は関数に依存する。関数値のぞくする空間の次元 n は関数には無関係である。

この公理は，$y''=f(x,y,y')$ の解を $y=y(x)$ とするとき，f の連続性を仮定すれば $y(x)$, $y'(x)$ は x および初期値の連続関数であるという性質に対応する.

<u>公理 2°</u> 関数族にぞくする関数の部分はやはり関数族にぞくする。

この公理は，解曲線 $(x, y(x), y'(x))$ の部分は やはり解曲線であるという事実に対応する.

公理3° $R^1\times R^n$ におけるコンパクトな集合を要素とする集合に Hausdorff の metric を導入した metric space において関数族はコンパクトな集合である。ここで，$\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ を $R^1\times R^n$ のコンパクト集合とするとき，$\mathcal{E}_1$ と $\mathcal{E}_2$ の Hausdorff の metric は

$$dist(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) = \inf\{\rho \mid U_\rho(\mathcal{E}_1)\supset\mathcal{E}_2, U_\rho(\mathcal{E}_2)\supset\mathcal{E}_1\}$$

$U_\rho(\mathcal{E})$ は $\mathcal{E}$ からの Euclid の距離が ρ よりも小さい点の集合.

この公理は本質的な仮定である. $y''=f(x,y,y')$ の右辺が連続な場合，解の集合は，同程度連続になるから，関数族としてコンパクトになる。

公理4° 関数族にぞくする二つの関数 f, g が $t=\alpha$ で一致するならば，$t\leqq\alpha$ で f と，$t\geqq\alpha$ で g と一致する関数も関数族にぞくする。

この公理は，解を接続したものはやはり解になるという性質に対応する.

公理5° 関数族 F にぞくする曲線によって埋められる集合を F の基本領域といい，$\mathcal{D}$ と書く. F のなかの極大曲

線とは それを真部分集合として含む曲線は $\mathcal{F}$ のなかに含まれていないことをいう。このとき、極大曲線の端点は $\mathcal{D}$ の境界点である。

この公理は、最大接続可能な解が存在し、端点は方程式の右辺の定義域の境界点であるという事実に対応する。

ついでに注意しておくが、関数族 $\mathcal{F}$ の要素は曲線であり、基本領域 $\mathcal{D}$ の要素は点となっている。

福原の存在定理を説明するために、基本領域 $\mathcal{D}$ の境界 $\mathcal{B}$ の点を分類しなければならない。

$\mathcal{B}^l$ は基本領域 $\mathcal{D}$ の左端といい、極大曲線の左端となる点の集り。$\mathcal{B}^r$ は基本領域 $\mathcal{D}$ の右端といい、極大曲線の右端となる点の集り。

$y''=f(x,y,y')$ の解曲線で言えば、$\mathcal{B}^l$ の点から左に出る解曲線は、もし接続できれば、必ず $\mathcal{D}$ の外部にあることを意味する。

$A\in\mathcal{B}$ しかし $\notin\mathcal{B}^l$ とすれば、A から左に出る曲線 $\in\mathcal{F}$ が存在する。$\mathcal{Z}^-(A)$ は、A から左に出るすべての曲線によって填められる点の集りを表わすものとする。このとき

$$\mathcal{B}^- = \{A \mid A \text{ は } \mathcal{B}\cap\mathcal{Z}^-(A) \text{ の集積点とならない}\}$$

$$\mathfrak{B}_- = \{A \mid A \text{ は } \mathfrak{B} \cap Z^-(A) \text{ の集積点となる}\}$$

とおく．同じようにして 右に出る曲線を考えることにより，$\mathfrak{B}^+$, $\mathfrak{B}_+$ が定義される．

$A \in \mathfrak{D}$ は $\mathfrak{B}^l$ にぞくする点の集積点でないと仮定する．Aの左側に，Aに十分近い超平面 $x=\xi$ を考え，これによる $Z^-(A)$ の横断面が連続体であるとき，A は本来の左Kneser点と呼ばれる．

$\mathcal{C}$ は $\mathfrak{D}$のコンパクト集合とし，$\mathfrak{F}$に属する曲線で $\mathcal{C}$ と交わるものは唯一点で交わるとき，$\mathcal{C}$ は $\mathfrak{D}$の横断面であるという．

次の定理は いわゆる Kneser定理である：

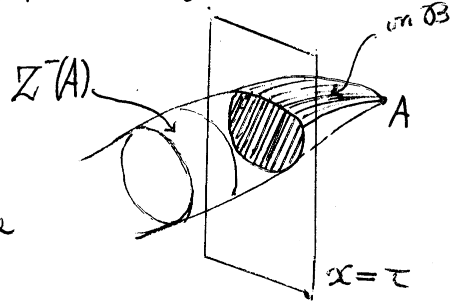
<u>定理 H_1</u> "$\mathfrak{D}$の各点は 本来の左Kneser点とする．$\mathcal{E} \subset \mathfrak{D}$ は連続体であり，$\mathcal{E}$の各点から左に出る曲線$\in \mathfrak{F}$ によって填められる点の集合，$Z^-(\mathcal{E})$，の横断面は 連続体 である．"

A が左Kneser点であるとは，次の二つの条件が満足されるときを言う：

i) $A \notin \mathfrak{B}_-$ (A は $\mathfrak{B} \cap Z^-(A)$ の孤立点) ならば，Aは本来の左Kneser点．

ii) $A \in \mathfrak{B}_-$ (A は $\mathfrak{B} \cap Z^-(A)$ の集積点) ならば，Aの十

分近く左側にある超平面 $x=\tau$ による $\mathcal{Z}^-(A)$ の横断面 と $\mathfrak{B}\cap\mathcal{Z}^-(A)$ との合併集合は 連続体 である.



次の定理は 本来の Kneser 定理, すなわち 定理 H_1, の拡張である.

<u>定理 H_2</u> "$\mathfrak{D}$ の 各点は 左 Kneser 点 である.

$\mathfrak{B}^- \subset \mathfrak{B}^r$

$\mathfrak{B}^l \cup \mathfrak{B}_-$ は 閉集合

と仮定すれば, $\mathcal{Z}^-(\mathcal{E})\cap(\mathfrak{B}^l\cup\mathfrak{B}_-)$ は連続体 である."

第2の仮定は, $y''=f(x,y,y')$ の解曲線でいえば, $A\in\mathfrak{B}$ のとき, A から左に出る解曲線は, A の十分小さい近傍では点 A を除いて $\mathfrak{D}$ の内部にあるならば, A から右に出る解曲線は もし接続可能であれば すべて $\mathfrak{D}$ の外部にある ことを意味する.

これら二つの定理を用いて, 次の定理に達する. これは 2点境界値問題についての基本的な結果である:

<u>定理 H_3</u> "$\mathcal{E}\subset\mathfrak{D}$ は連続体.

$\mathcal{E}'\subset\mathfrak{B}^l\cup\mathfrak{B}_-$ は連続体.

$\mathcal{E}\cap(\mathcal{B}^l\cup\mathcal{B}_-)$ は少くとも二つの点を含み，その点は $\mathcal{B}^l\cup\mathcal{B}_-$ のなかで $\mathcal{E}'$ によって分離される
（すなわち，これら二点は，$\mathcal{B}^l\cup\mathcal{B}_- - \mathcal{E}'$ の異った連結成分に属する）

と仮定すれば，$\mathcal{E}$ と $\mathcal{E}'$ とを結ぶ曲線 $\in \mathcal{F}$ が存在する。”

§3 福原の定理による南雲型定理の考察

福原の定理の証明をここに紹介する紙数はないので，証明を省略してしまったが，南雲型定理はどのように取り扱われるかを説明しよう。

2階非線型常微分方程式

$$y''=f(x,y,y')$$

を考える。

非線型 Bessel 方程式および境界層の方程式の研究に直接役立つ形で述べる。

存在定理

“$f(x,y,z)$ は (x,y,z)−space の領域

$$0<x<\infty,\quad \underline{\omega}(x)\leqq y\leqq\overline{\omega}(x),\quad \underline{\Omega}(x,y)\leqq z\leqq\overline{\Omega}(x,y)$$

において (x,y,z) の関数として連続である．

(1) $\overline{\omega}(x)$ は $0\leqq x\leqq\infty$ で連続かつ単調増加かつ

$$\overline{\omega}(0)=0,\quad \lim_{x\to\infty}\overline{\omega}(x)=1\ ;$$

かつ

$$\overline{\omega}(x)=\begin{cases}\overline{\omega}_1(x) & 0\leqq x\leqq N_1\\ \overline{\omega}_2(x) & N_1\leqq x\leqq N_2\\ \overline{\omega}_3(x) & N_2\leqq x<\infty\end{cases}$$

の形に表わされ，（$N_1=N_2$ の場合も含まれる）

$\overline{\omega}_1(x)$ は $0<x\leqq N_1$ において class C^2 に属する関数で，

$$\overline{\omega}_1''(x)\leqq f(x,\overline{\omega}_1(x),\overline{\omega}_1'(x))\qquad 0<x\leqq N_1\ ;$$

$\overline{\omega}_2(x)$ は $N_1-\varepsilon\leqq x\leqq N_2$ において class C^2 に属し，

$$\overline{\omega}_2''(x)\leqq f(x,\overline{\omega}_2(x),\overline{\omega}_2'(x))\qquad N_1-\varepsilon\leqq x\leqq N_2\ ;$$

$\overline{\omega}_3(x)$ は $N_2-\varepsilon\leqq x<\infty$ において class C^2 に属し，

$$\overline{\omega}_3''(x)\leqq f(x,\overline{\omega}_3(x),\overline{\omega}_3'(x)),\qquad N_2-\varepsilon\leqq x<\infty.$$

しかも

$$\overline{\omega}_1(N_1)=\overline{\omega}_2(N_1),\quad \overline{\omega}_1(x)<\overline{\omega}_2(x)\quad N_1-\varepsilon\leqq x<N_1,$$

$$\overline{\omega}_2(N_2)=\overline{\omega}_3(N_2),\quad \overline{\omega}_2(x)<\overline{\omega}_3(x)\quad N_2-\varepsilon\leqq x<N_2.$$

ε は十分小さい正数.

(2) $\underline{\omega}(x)$ は $0\leqq x\leqq+\infty$ において連続かつ単調増加で，

$$\underline{\omega}(0)=0,\qquad \lim_{x\to\infty}\underline{\omega}(x)=1$$

かつ

$$\underline{\omega}(x)=\begin{cases}\underline{\omega}_1(x) & 0\leqq x\leqq M,\\ \underline{\omega}_2(x) & M\leqq x\leqq\infty\end{cases}$$

の形に表わされ，

$\underline{\omega}_1(x)$ は $0<x\leqq M$ において class C^2 に属し，

$$\underline{\omega}_1''(x) \geqq f(x, \underline{\omega}_1(x), \underline{\omega}_1'(x)), \quad 0 < x \leqq M;$$

$\underline{\omega}_2(x)$ は $M-\varepsilon \leqq x < \infty$ において class C^2 に属し,

$$\underline{\omega}_2''(x) \geqq f(x, \underline{\omega}_2(x), \underline{\omega}_2'(x)) \quad M-\varepsilon \leqq x < \infty.$$

しかも

$$\underline{\omega}_1(M) = \underline{\omega}_2(M), \quad \underline{\omega}_1(x) > \underline{\omega}_2(x) \quad M-\varepsilon \leqq x < M$$

$$\underline{\omega}'(M) = \underline{\omega}_2'(M)$$

(3) $\underline{\Omega}(x,y)$, $\overline{\Omega}(x,y)$ は

$$0 < x < \infty, \quad \underline{\omega}_1(x) \leqq y \leqq \overline{\omega}_2(x)$$

において 1回連続微分可能で, 次の不等式をみたす:

$$\underline{\Omega}(x, \overline{\omega}_1(x)) \leqq \overline{\omega}_1'(x) \leqq \overline{\Omega}(x, \overline{\omega}_1(x)) \quad 0 < x \leqq N_1$$

$$\underline{\Omega}(x, \overline{\omega}_2(x)) \leqq \overline{\omega}_2'(x) \leqq \overline{\Omega}(x, \overline{\omega}_2(x)) \quad N_1-\varepsilon \leqq x \leqq N_2$$

$$\underline{\Omega}(x, \overline{\omega}_3(x)) \leqq \overline{\omega}_3'(x) \leqq \overline{\Omega}(x, \overline{\omega}_3(x)) \quad N_2-\varepsilon \leqq x < \infty$$

$$\underline{\Omega}(x, \underline{\omega}_1(x)) \leqq \underline{\omega}_1'(x) \leqq \overline{\Omega}(x, \underline{\omega}_1(x)) \quad 0 < x \leqq M$$

$$\underline{\Omega}(x, \underline{\omega}_2(x)) \leqq \underline{\omega}_2'(x) \leqq \overline{\Omega}(x, \underline{\omega}_2(x)) \quad M-\varepsilon \leqq x < \infty.$$

しかも 次の不等式が成り立つ:

$$f(x,y,\underline{\Omega}(x,y)) - \underline{\Omega}_x(x,y) - \underline{\Omega}_y(x,y)\,\underline{\Omega}(x,y) > 0$$

$$f(x,y,\overline{\Omega}(x,y)) - \overline{\Omega}_x(x,y) - \overline{\Omega}_y(x,y)\,\overline{\Omega}(x,y) < 0$$

$$\text{for } 0 < x < \infty, \quad \underline{\omega}(x) \leqq y \leqq \overline{\omega}(x).$$

これらの条件がすべて満足されるならば

境界値問題

$$y'' = f(x, y, y')$$
$$y(0)=0, \qquad y(\infty)=1$$
$$0<y(x)<1 \quad \text{for } 0<x<\infty$$

は少くとも一つ解をもつ。このとき $\underline{\omega}(x)<y(x)<\overline{\omega}(x),\ 0<x<\infty$.

<u>証明</u>

$\{a_n\} \downarrow 0,\quad \{b_n\}\uparrow \infty$ なる二組の点列をとる。

$a_n=a,\ b_n=b$ とおき、

$$\underline{\omega}(a)\leqq A\leqq \overline{\omega}(a), \qquad \underline{\omega}(b)\leqq B\leqq \overline{\omega}(b)$$

なる A, B を適当にえらべば、

$$y''=f(x,y,y')$$
$$y(a)=A, \quad y(b)=B$$

は解をもつことを証明すればよい。じっさい そのような解の一つを $y(x)=y_n(x)$ とすれば、$\{y_n(x)\}$ なる解の列をえる。これから適当な部分列をえらび広義一様収束する極限は最初の境界値問題の解である。n は十分大きくとり

$$a=a_n<\min(N_1, M), \qquad b=b_n>\max(N_2, M)$$ とする。

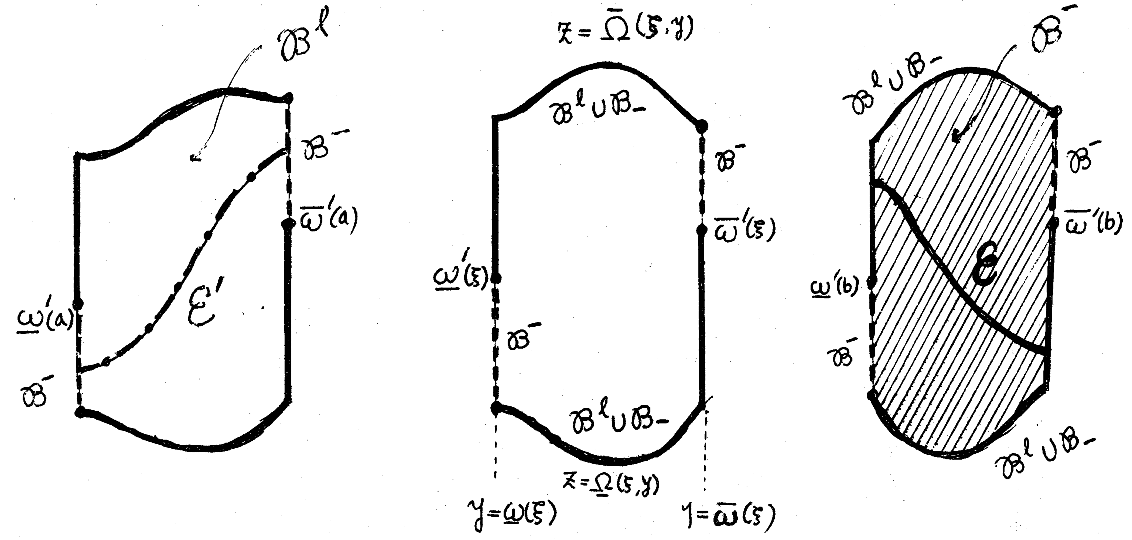
$\mathfrak{D}$ としては

$$a\leqq x\leqq b, \quad \underline{\omega}(x)\leqq y\leqq \overline{\omega}(x), \quad \underline{\Omega}(x,y)\leqq z\leqq \overline{\Omega}(x,y)$$

で表わされる (x,y,z)-space の閉領域をとる。$\mathfrak{D}$ の任意

の点を (ξ, η, ζ) とし, $x=\xi$ のとき $y=\eta$, $y'=\zeta$ となる解を $\varphi(x)$ で表わす。F は 解曲線 $(x, \varphi(x), \varphi'(x))$ の全体で $(x, \varphi(x), \varphi'(x))$ が点集合として $\mathfrak{D}$ に属するようなものとする。このとき $\mathfrak{D}$ は F の基本領域となる。

$\mathfrak{D}$ の超平面 $x=a$, $x=\xi$, $x=b$ による切口を考える:



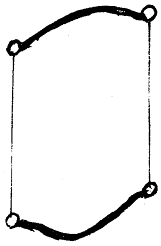
$x=a$ $\qquad$ $x=\xi$ $\qquad$ $x=b$

------ は $\mathfrak{B}^-$

—— は $\mathfrak{B}^l \cup \mathfrak{B}_-$

もう少し詳しく説明する. 切口は以下すべて超平面 $x=\xi$ 上にあるものと考える。

次の六つの Cases に分けて, $\mathfrak{D}$ の境界点(いまは超平面 $x=\xi$ による $\mathfrak{D}$ の切口の境界点)を調べる.

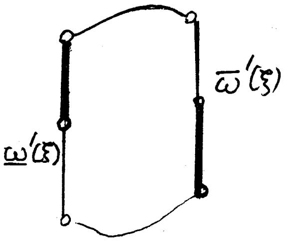


$\underline{\omega}(\xi) < \eta < \overline{\omega}(\xi),\ \ \zeta = \overline{\Omega}(\xi, \eta)$

or

$\underline{\omega}(\xi) < \eta < \overline{\omega}(\xi),\ \ \zeta = \underline{\Omega}(\xi, \eta)$

となる $(\xi, \eta, \zeta) \in \mathfrak{B}^l$ である.

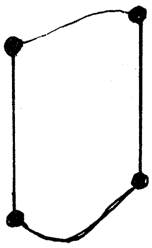


$\eta = \overline{\omega}(\xi),\ \ \underline{\Omega}(\xi, \eta) < \zeta < \overline{\omega}'(\xi)$

or

$\eta = \underline{\omega}(\xi),\ \ \underline{\omega}'(\xi) < \zeta < \overline{\Omega}(\xi, \eta)$

となる $(\xi, \eta, \zeta) \in \mathfrak{B}^l$



$\eta = \overline{\omega}(\xi),\ \ \overline{\omega}'(\xi) < \zeta = \overline{\Omega}(\xi, \eta)$

or

$\eta = \overline{\omega}(\xi),\ \ \zeta = \underline{\Omega}(\xi, \eta) < \overline{\omega}'(\xi)$

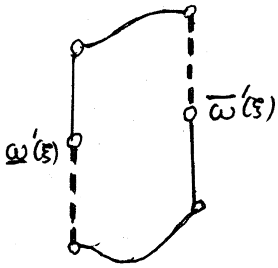
or

$\eta = \underline{\omega}(\xi),\ \ \underline{\omega}'(\xi) < \zeta = \overline{\Omega}(\xi, \eta)$

or

$\eta = \underline{\omega}(\xi),\ \ \zeta = \underline{\Omega}(\xi, \eta) < \underline{\omega}'(\xi)$

となる $(\xi, \eta, \zeta) \in \mathfrak{B}^l$

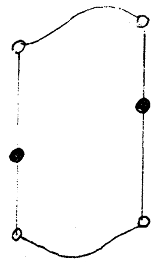


$\eta = \overline{\omega}(\xi),\ \ \overline{\omega}'(\xi) < \zeta < \overline{\Omega}(\xi, \eta)$

or

$\eta = \underline{\omega}(\xi),\ \ \underline{\Omega}(\xi, \eta) < \zeta < \underline{\omega}'(\xi)$

となる $(\xi, \eta, \zeta) \in \mathfrak{B}^- \cap \mathfrak{B}^r$. このことは $\mathfrak{B}^-$ の点は, $\mathfrak{B}^r$ に属することを示す.

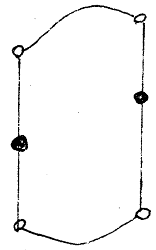


$\eta=\overline{\omega}(\xi),\ \zeta=\overline{\omega}'(\xi),\ \overline{\omega}''(\xi)<f(\xi,\overline{\omega}(\xi),\overline{\omega}'(\xi))$

or

$\eta=\underline{\omega}(\xi),\ \zeta=\underline{\omega}'(\xi),\ \underline{\omega}''(\xi)>f(\xi,\underline{\omega}(\xi),\underline{\omega}'(\xi))$

となる $(\xi,\eta,\zeta)\in\mathfrak{B}^l\cap\mathfrak{B}^r$



$\eta=\overline{\omega}(\xi),\ \zeta=\overline{\omega}'(\xi),\ \overline{\omega}''(\xi)=f(\xi,\overline{\omega}(\xi),\overline{\omega}'(\xi))$

or

$\eta=\underline{\omega}(\xi),\ \zeta=\underline{\omega}'(\xi),\ \underline{\omega}''(\xi)=f(\xi,\underline{\omega}(\xi),\underline{\omega}'(\xi))$

となる (ξ,η,ζ) は，もし $\mathfrak{B}^l$ に属しなければ，$\mathfrak{B}_-$ に属しかつ左Kneser点である.

最後の命題以外の証明は，やさしいが，最後命題の証明はむずかしい。

ただし $x=N_1$ or $x=N_2$ のときは

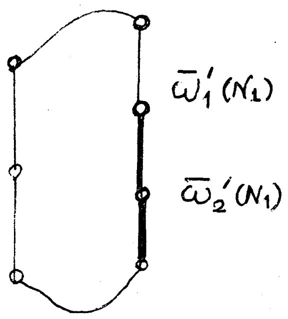
$$\overline{\omega}_1'(N_1)=\lim_{x\to N_1-0}\overline{\omega}_1'(x)>\overline{\omega}_2'(N_1),$$

$$\overline{\omega}_2'(N_2)=\lim_{x\to N_2-0}\overline{\omega}_2'(x)\geqq\overline{\omega}_3'(N_2),$$

$x=M$ のときは

$$\underline{\omega}_1'(M)=\lim_{x\to M-0}\underline{\omega}_1'(x)=\underline{\omega}_2'(M)$$

となっているから，$x=N_1$，$x=N_2$ のときは少し様子が異なる。よって例えば $x=N_1$ のときを改めて調べる。



いままでの

$\eta=\overline{\omega}(\xi),\ \underline{\Omega}(\xi,\eta)<\zeta<\overline{\omega}'(\xi)$

なる部分は，

$$\eta=\overline{\omega}(\xi),\ \underline{\Omega}(\xi,\eta)<\zeta<\overline{\omega}_2'(N_1),$$

$$\eta=\overline{\omega}(\xi),\ \zeta=\overline{\omega}_2'(N_1),$$

$$\eta=\overline{\omega}(\xi),\ \overline{\omega}_2'(N_1)<\zeta<\overline{\omega}_1'(N_1)$$

の三つの部分に分けて調べねばならない。それぞれ，$\mathfrak{B}^l\cap\mathfrak{B}^+$，$\mathfrak{B}^l$，$\mathfrak{B}^l\cap\mathfrak{B}^x$，したがって，やはり $\mathfrak{B}^l$ に属することがわかる。

福原の存在定理 H_3 を応用するために，$\mathcal{E}$ として $x=b$ における $\mathfrak{D}$ の切口上の実線で図示されている一方の $\mathfrak{B}^l\cup\mathfrak{B}_-$ の点と他方の $\mathfrak{B}^l\cup\mathfrak{B}_-$ の点とを結ぶ曲線をとる；$\mathcal{E}'$ として $x=a$ における $\mathfrak{D}$ の切口上の点線で図示されるいる $\mathfrak{B}^-$（二つの連結成分）の二つの点を結ぶ曲線をとる。このとき $\mathcal{E}\cap(\mathfrak{B}^l\cup\mathfrak{B}_-)$ は二点を含む。この二点を $\mathfrak{D}$ の境界 $\mathfrak{B}$ 上で $\mathfrak{B}^l\cup\mathfrak{B}_-$ のなかで結ぼうとすれば，図から明らかであるように，どうしても $\mathcal{E}'$ と交わらねばならない。したがって $\mathcal{E}$ と $\mathcal{E}'$ との

点を結ぶ曲線 $\in F$ が少くとも一つは存在する。この曲線に対応する解 $y(x)$ は，

$$\underline{\omega}(x) \leqq y(x) \leqq \overline{\omega}(x), \quad \underline{\Omega}(x, y(x)) \leqq y'(x) \leqq \overline{\Omega}(x, y(x))$$
$$a \leqq x \leqq b$$

を満足する。このようにして南雲型の定理は証明される。

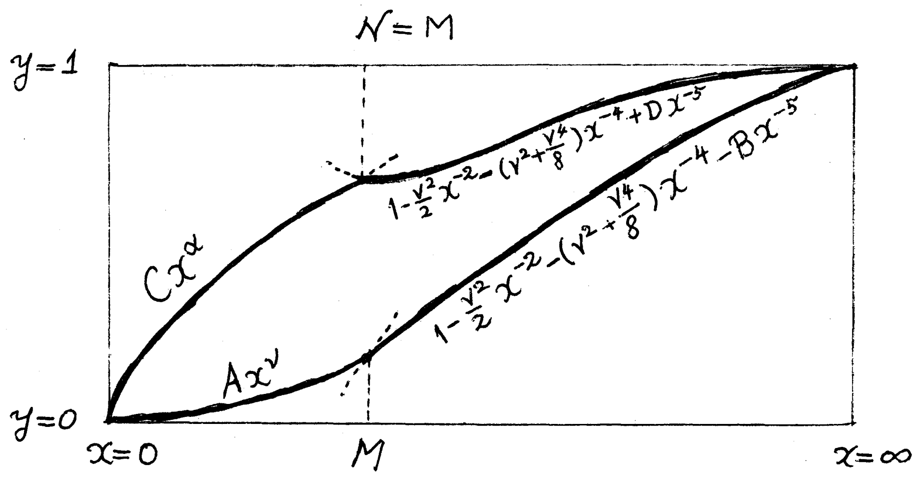
§4. 非線型 Bessel 方程式

境界値問題

$$y'' = -x^{-1}y' + \nu^2 x^{-2} y + y^3 - y \equiv f(x, y, y')$$
$$y(0) = 0, \qquad y(\infty) = 1$$
$$0 < y(x) < 1 \qquad \text{for} \quad 0 < x < \infty$$

を考える。$\nu > 0$ はパラメーター。

$x=0$ は確定型特異点，$x=\infty$ は不確定型特異点であるから，そこにおける形式解の計算により，$x=0$ では ν を指数とする解が存在し，$x=\infty$ では x^{-2} の整級数に漸近展開される解が存在することがわかる。これらのことを考慮すれば $\underline{\omega}(x)$, $\overline{\omega}(x)$ として何をとればよいかは大体の見当がつく。図は $\nu > 1$ の場合である。もちろん以下の結果は $0 < \nu \leqq 1$ のときも正しい。



"

$\underline{\omega}_1(x)=Ax^{\nu}$, for $0<x\leqq M+\varepsilon$

$\underline{\omega}_2(x)=1-\frac{\nu^2}{2}x^{-2}-(\nu^2+\frac{\nu^4}{8})x^{-4}-Bx^{-5}$ for $M-\varepsilon\leqq x<\infty$

$\overline{\omega}_1(x)=Cx^{\alpha}$ for $0<x\leqq M+\varepsilon$

$\overline{\omega}_2(x)=1-\frac{\nu^2}{2}x^{-2}-(\nu^2+\frac{\nu^4}{8})x^{-4}+Dx^{-5}$ for $M-\varepsilon\leqq x<\infty$

εは十分小なる正数, A, B, C, D はすべて正数.

$\overline{\Omega}(x,y)=E\,x^{\alpha-1}$

$E>0$

$\underline{\Omega}(x,y)=-E\,x^{\alpha-1}$.

$B\gg1$とし, M, A, D, C, α および E を B の関数として適当に定めれば, §3の存在定理に仮定されたすべての条件が満足される"

1° まず $y=\underline{\omega}_1(x)$ と $y=\underline{\omega}_2(x)$ とが接するための条件を探す。 その条件は

$$Ax^{\nu}=1-\frac{\nu^2}{2}x^{-2}-(\nu^2+\frac{\nu^4}{8})x^{-4}-Bx^{-5},$$

$$\nu A x^{\nu} = \nu^2 x^{-2} + (4\nu^2 + \frac{\nu^4}{2}) x^{-4} + 5 B x^{-5}$$

が共通根をもつことである．$A x^{\nu}$ を消去すれば

$$\nu x^5 - \nu^2 (1+\frac{\nu}{2}) x^3 - 4\nu^2 (1+\frac{\nu}{4})(1+\frac{\nu^2}{8}) x - (5+\nu) B = 0.$$

この根が正確に計算できないために　摂動法を用いざるをえないように思う。

$B \gg 1$　と仮定する．根 M（接点の x 座標）は

$$M = \left(\frac{5+\nu}{\nu}\right)^{\frac{1}{5}} B^{\frac{1}{5}} \left(1 + \frac{1}{5}(\nu + \frac{\nu^2}{2}) \left(\frac{\nu}{5+\nu}\right)^{\frac{2}{5}} B^{-\frac{2}{5}} + \cdots \right)$$

$\cdots$ は $\left(\frac{\nu}{5+\nu}\right)^{\frac{2}{5}} B^{-\frac{2}{5}}$ のベキ級数．以下同様

したがって　$A = \underline{\omega}_2(M) M^{-\nu}$　より

$$A = \frac{5}{5+\nu} \left(\frac{\nu}{5+\nu}\right)^{\frac{\nu}{5}} B^{-\frac{\nu}{5}} \left(1 - \frac{1}{10}\nu^2 (5+\nu) \left(\frac{\nu}{5+\nu}\right)^{\frac{2}{5}} B^{-\frac{2}{5}} + \cdots \right)。$$

$x = M$　において

$$\underline{\omega}_1(x) = \underline{\omega}_2(x), \qquad \underline{\omega}_1'(x) = \underline{\omega}_2'(x)$$

となるが，さらに

$$\underline{\omega}_1''(x) > \underline{\omega}_2''(x) \qquad \text{at } x = M$$

が成立つ。じっさい

$$\underline{\omega}_1''(M) - \underline{\omega}_2''(M) =$$

$$= 5(5+\nu)\left(\frac{\nu}{5+\nu}\right)^{\frac{7}{5}} B^{-\frac{2}{5}}\left(1+\cdots\quad\right) > 0 \quad \text{when } B \gg 1$$

このことは

$$\underline{\omega}_1(x) > \underline{\omega}_2(x) \qquad M-\varepsilon \leqq x \leqq M+\varepsilon,\quad x \neq M$$

となっていることを示す。

2° $\underline{\omega}_1(x) = Ax^{\nu}$ が

$$\underline{\omega}_1''(x) > f(x, \underline{\omega}_1(x), \underline{\omega}_1'(x))$$

を満足する x の範囲は

$$0 < x < A^{-\frac{1}{\nu}}$$

となることがわかる。しかるに

$$A^{-\frac{1}{\nu}} = \left(\frac{5+\nu}{5}\right)^{\frac{1}{\nu}}\left(\frac{5+\nu}{\nu}\right)^{\frac{1}{5}} B^{\frac{1}{5}}\left(1+\frac{1}{10}\nu(5+\nu)\left(\frac{\nu}{5+\nu}\right)^{\frac{2}{5}}B^{-\frac{2}{5}}+\cdots\right)$$

よって

$$M < A^{-\frac{1}{\nu}}$$

故に $\underline{\omega}_1(x)$ は $0 < x \leqq M+\varepsilon$ において

$$\underline{\omega}_1''(x) > f(x, \underline{\omega}_1(x), \underline{\omega}_1''(x))$$

をみたす。

3° $\underline{\omega}_2(x) = 1-\frac{\nu^2}{2}x^{-2}-\left(\nu^2+\frac{\nu^4}{8}\right)x^{-4}-Bx^{-5}$ が

$$\underline{\omega}_2''(x) > f(x, \underline{\omega}_2(x), \underline{\omega}_2'(x))$$

を満足する x の範囲を求める。直接計算すればすぐわかるように，不等式

$$(*)\quad 2B+\frac{3}{64}\nu^8x^{-3}+\frac{3}{2}\left(\nu^2+\frac{\nu^4}{8}\right)^2\nu^2x^{-5}$$

$$+3\left(\nu^4+\frac{\nu^8}{8}\right)Bx^{-6}+\left(\frac{3}{2}\nu^2B^2+\left(\nu^2+\frac{\nu^4}{8}\right)^3\right)x^{-7}$$

$$+3\left(\nu^2+\frac{\nu^4}{8}\right)Bx^{-8}+3\left(\nu^2+\frac{\nu^4}{8}\right)B^2x^{-9}+B^3x^{-10}$$

$$>\left(16\nu^2+4\nu^4+\frac{\nu^6}{8}\right)x^{-1}+(25+2\nu^2)Bx^{-2}$$

$$+3\nu^4x^{-3}+6\nu^2Bx^{-4}+3B^2x^{-5}.$$

をみたす x の値に対して $\omega_2''>f$ が成立つ。とくにこの不等の左辺から $2B+B^3x^{-10}$，右辺から $3B^2x^{-5}$ なる項をとりだし，

$$2B+B^3x^{-10}>3B^2x^{-5}$$

が成立つ範囲を考える。その範囲は $x=\infty$ までのびていなければならないことから，

$$x>B^{\frac{1}{5}}.$$

よって

$$\left(\frac{5+\nu}{\nu}\right)^{\frac{1}{5}}B^{\frac{1}{5}}\leqq x$$

においては上記の不等式はもちろん成立し，かつ

$$2B+B^3x^{-10}-3B^2x^{-5}\geqq\frac{5(10+\nu)}{(5+\nu)^2}B\quad\text{for }\left(\frac{5+\nu}{\nu}\right)^{\frac{1}{5}}B^{\frac{1}{5}}\leqq x$$

しかるに 不等式(*)において, $2B$, B^3x^{-10}, $3B^2x^{-5}$ 以外の項の大きさは $O(B^{\frac{3}{5}})=o(B)$ を超えない。よって, ν に関係するが, B を十分大きくとれば不等式(*)は $\left(\frac{5+\nu}{\nu}\right)^{\frac{1}{5}}B^{\frac{1}{5}} \leqq x < \infty$ において成立つ。しかも

$$\left(\frac{5+\nu}{\nu}\right)^{\frac{1}{5}}B^{\frac{1}{5}} < M.$$

である。

故に $\underline{\omega}_2(x)$ は $M-\varepsilon \leqq x < \infty$ において

$$\underline{\omega}_2''(x) > f(x, \underline{\omega}_2(x), \underline{\omega}_2'(x))$$

をみたす。

$4°$ $y=\overline{\omega}_2(x)$ は極小値をもつことがわかるから, その極小値を $x=M$ においてとるように D の値を定める。この極小値は最小値である. 極値を与える x は $\overline{\omega}_2'(x)=0$ の根であるから, そのような x は

$$\nu^2x^3+\left(4\nu^2+\frac{\nu^4}{2}\right)x-5D=0$$

の根であり, かつこの方程式はただ一つの実根 >0 をもつ。よって

$$D=\frac{1}{5}\left\{\nu^2M^3+\left(4\nu^2+\frac{\nu^4}{2}\right)M\right\}$$

となるように D を定める. このとき

$$D=\frac{\nu^2}{5}\left(\frac{5+\nu}{\nu}\right)^{\frac{3}{5}}B^{\frac{3}{5}}\left(1+\left(4+\frac{3\nu}{5}+\frac{4\nu^2}{5}\right)\left(\frac{\nu}{5+\nu}\right)^{\frac{2}{5}}B^{-\frac{2}{5}}+\cdots\right).$$

C を $C=\overline{\omega}_2(M)\,M^{-\alpha}$ となるように定めれば

$$C=\left(\frac{\nu}{5+\nu}\right)^{\frac{\alpha}{5}}B^{-\frac{\alpha}{5}}\left(1-\frac{\nu}{5}\left(\alpha+\frac{3+\alpha}{2}\nu\right)\left(\frac{\nu}{5+\nu}\right)^{\frac{2}{5}}B^{-\frac{2}{5}}+\cdots\cdots\right)$$

をえる。このとき

$$\overline{\omega}_1'(M)>\overline{\omega}_2'(M)=0.$$

5° $\overline{\omega}_2(x)=1-\frac{\nu^2}{2}x^{-2}-\left(\nu^2+\frac{\nu^4}{8}\right)x^{-4}+Dx^{-5}$ が

$$\overline{\omega}_2''(x)<f(x,\overline{\omega}_2(x),\overline{\omega}_2'(x))$$

を満足するような x の範囲を探そう。その条件は p.33 の不等式(*)において B の代わりに $-D$ とおけば えられる。よって

$$(**)\quad (25+2\nu^2)Dx^{-2}+\frac{3\nu^8}{64}x^{-3}+6\nu^2Dx^{-4}$$
$$+\frac{3}{2}\nu^2\left(\nu^2+\frac{\nu^4}{8}\right)^2x^{-5}+\left(\frac{3\nu^2}{2}D^2+\left(\nu^2+\frac{\nu^4}{8}\right)^3\right)x^{-7}$$
$$+3\left(\nu^2+\frac{\nu^4}{8}\right)D^2x^{-9}$$
$$<2D+\left(16\nu^2+4\nu^4+\frac{\nu^6}{8}\right)x^{-1}+3\nu^4x^{-3}+3D^2x^{-5}$$
$$+3\left(\nu^4+\frac{\nu^6}{8}\right)D^2x^{-6}+3\left(\nu^2+\frac{\nu^4}{8}\right)^2Dx^{-8}+D^3x^{-10}.$$

この不等式は 次の不等式が同時になりたつ x の値にたいして成立つ： $(25+2\nu^2)Dx^{-2}<D$; $9\nu^2Dx^{-4}<D$;

$\frac{3}{64}\nu^8x^{-3}<\frac{\nu^6}{64}x^{-1}$; $\frac{3\nu^2}{2}\left(\nu^2+\frac{\nu^4}{8}\right)^2x^{-5}<\frac{6}{64}\nu^6x^{-1}$;

$\left(\nu^2+\frac{\nu^4}{8}\right)^3x^{-7}<\frac{\nu^6}{64}x^{-1}$; $\frac{3\nu^2}{2}D^2x^{-7}<\frac{3}{4}D^2x^{-5}$;

$8(1+2\nu^2+\nu^4)D^2x^{-9}<2D^2x^{-5}.$

これら7個の不等式は $\sqrt{2\nu^2+25} < x$ において同時に成立つ。ただし $\overline{\omega}_2(x) < 1$ でなければならない。したがって $\overline{\omega}_2(x)=1$ の有限な正根を x_0 とすれば，不等式(**)は

$$\max\left\{(2\nu^2+25)^{\frac{1}{2}},\ x_0\right\} < x$$

において成立つ。しかるに x_0 は

$$\frac{\nu^2}{2}x^3+\left(\nu^2+\frac{\nu^4}{8}\right)x-D=0$$

の根である。$B\gg 1$ のとき $D\gg 1$ であるから，

$$x_0=\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{5+\nu}{\nu}\right)^{\frac{1}{5}}B^{\frac{1}{5}}\left(1+\cdots\right) < M.$$

よって

$\overline{\omega}_2(x)$ は $M-\varepsilon\leqq x<\infty$ において

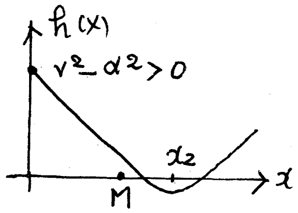
$\overline{\omega}_2'' < f(x,\overline{\omega}_2,\overline{\omega}_2')$

をみたす。

6° $\overline{\omega}_1(x)=Cx^{\alpha}$ が $\overline{\omega}_1'' < f(x,\overline{\omega}_1,\overline{\omega}_1')$ を $0<x\leqq M$ において満足するためには

$$h(x)\equiv \nu^2-\alpha^2-x^2+C^2x^{2\alpha+2},\quad 0<x\leqq M$$

が成立てばよいことがわかる。



$h(x)$ の最小値をとる x の値を x_2 とおけば $x_2=\left[(1+\alpha)C^2\right]^{-\frac{1}{2\alpha}}$. よって α を

$$M<x_2,\ \text{かつ}\ h(M)>0$$

となるように定める。直接計算によって α の満足すべき条件は

$$\alpha < \frac{3\nu^2}{5}\left(\frac{\nu}{5+\nu}\right)^{\frac{2}{5}} B^{-\frac{2}{5}} + \cdots, \quad \text{且つ} \quad \alpha < \frac{\nu}{\sqrt{5}}$$

となることがわかる

7° Ω, $\bar{\Omega}$ が §3の存在定理に述べた条件を満足するために E を十分大きくとればよい. 初等的計算ではあるが紙数を要するので省略する. Eは十分大きいといってもできるだけ精密な値でなければならない.

$$E > (\nu^2 C + \nu^{2\alpha} C^3)\alpha^{-1}; \quad E > \max(\nu^{2-\alpha}, M^{2-\alpha})\alpha^{-1};$$

$$E > \nu C; \quad E > \nu^2 M^{-\alpha}\alpha^{-1};$$

$$E > \nu^2 x^{-\alpha-2} + (4\nu^2 + \tfrac{\nu^4}{2})x^{-\alpha-4} + 5Bx^{-\alpha-5} \quad \text{for } M \leqq x < \infty;$$

$\left(\dfrac{1-\nu^2 x^{-2}}{3}\right)^{\frac{1}{2}} = \underline{\omega}_2(x)$ の根を S とすれば

$$S = \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}\right)^{\frac{1}{5}} B^{\frac{1}{5}}\left(1 + \frac{\nu^2}{10}\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{2}{5}} B^{-\frac{2}{5}} + \cdots\right).$$

したがって $\nu > 5(\sqrt{3}-1)$ ならば $M < S$, $0 < \nu \leqq 5(\sqrt{3}-1)$ ならば $S < M$ となる。 $\nu^2 x^{-2}\underline{\omega}_2(x) + \underline{\omega}_2(x)^3 - \underline{\omega}_2(x) =$
$= -2\nu^2 x^{-4}(1 + O(x^{-1}))$ となることに注意する. さらに

$$E > \left(-\nu^2 x^{-2}\underline{\omega}_2(x) - \underline{\omega}_2(x)^3 + \underline{\omega}_2(x)\right)x^{2-\alpha}\alpha^{-1}$$

$$\text{for } S \leq x < \infty \text{ when } \nu > 5(\sqrt{3}-1) \text{ or } M \leq x < \infty \text{ when } \nu \leqq 5(\sqrt{3}-1).$$

および

$$E > \frac{2}{3\sqrt{3}}(1-\nu^2 S^{-2})^{\frac{3}{2}} \max(M^{2-\alpha}, S^{2-\alpha})\alpha^{-1}.$$

けっきょく 7個の不等式を満足するようにEをとればよい.

§5 境界層の方程式 (Algebraic Type)

まえがきにおいて説明したように、方程式は

$$y'' = -\frac{1}{\sqrt{y}}\left(2xy' + 4\lambda(1-y)\right) \equiv f(x, y, y')$$

$$y(0) = 0, \qquad y(\infty) = 1$$

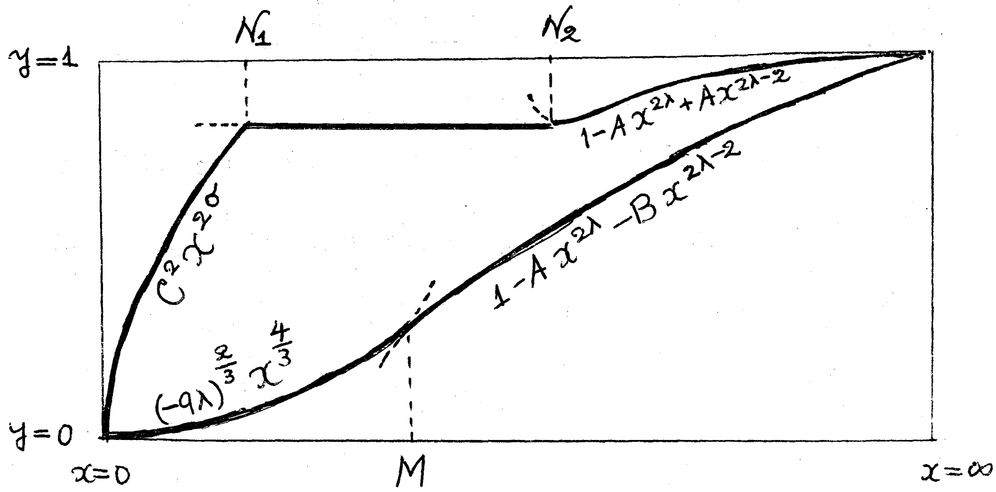
$$0 < y(x) < 1 \qquad \text{for } 0 < x < \infty.$$

で与えられる。

パラメーター λ は負の数で、不等式

(*) $$-\frac{3}{2}\lambda(3-2\lambda)(5-3\lambda) < 1$$

を満足するものとす。すなわち $-0.042 \leqq \lambda < 0$.



“

$$\omega_1(x) = (-9\lambda)^{\frac{2}{3}} x^{\frac{4}{3}} \qquad \text{for } 0 < x \leqq M + \varepsilon$$

$$\omega_2(x) = 1 - A x^{2\lambda} - B x^{2\lambda - 2} \qquad \text{for } M - \varepsilon \leqq x < \infty$$

$$\overline{\omega}_1(x) = C^2 x^{2\sigma} \qquad \text{for } 0 < x \leqq N_1$$

$$\overline{\omega}_2(x) = 1 - \frac{1}{1-\lambda}\left(\frac{1-\lambda}{-\lambda}\right)^{\lambda} A \qquad \text{for } N_1 - \varepsilon \leqq x \leqq N_2$$

$$\overline{\omega}_3(x) = 1 - A x^{2\lambda} + A x^{2\lambda-2} \qquad \text{for } N_2 - \varepsilon \leqq x < \infty .$$

$$\overline{\Omega}(x,y) = F\frac{y}{x},$$

$$\underline{\Omega}(x,y) = 0$$

ここで σ は $0 < 2\sigma < 1$ なる任意の数

$$N_1 = \left(1 - \frac{1}{1-\lambda}\left(\frac{1-\lambda}{-\lambda}\right)^{\lambda} A\right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{\sigma(1-2\sigma)}{2(\sigma-\lambda)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$N_2 = \left(\frac{1-\lambda}{-\lambda}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$C^2 = \left(\frac{2(\sigma-\lambda)}{\sigma(1-2\sigma)}\right)^{\sigma} \left(1 - \frac{1}{1-\lambda}\left(\frac{1-\lambda}{-\lambda}\right)^{\lambda} A\right)^{1-\frac{\sigma}{2}}$$

$\varepsilon > 0$ は十分小なる数.

A, B は

$$(**) \quad \begin{cases} (-9\lambda)^{\frac{2}{3}} x^{\frac{4}{3}} = 1 - A x^{2\lambda} - B x^{2\lambda-2}, \\ \frac{2}{3}(-9\lambda)^{\frac{2}{3}} x^{\frac{4}{3}} = -\lambda A x^{2\lambda} - (\lambda-1) B x^{2\lambda-2} \end{cases}$$

が共通根 $M > 0$ をもつような正の数である.

$F > \frac{4}{3}$ なる正の数.

このとき λ が不等式(*)を満足する負数とすれば, §3の存在定理に仮定されたすべての条件が満足される。"

ここでは λ に関する制限(*)がどのようにしてえられた

かを説明したい。　方程式(**)が共通根をもつことは，二つの曲線 $y=\omega_1(x)$ と $y=\omega_2(x)$ が接することを意味する。

(**)より $Ax^{2\lambda}$ を消去すれば

$$H(x)\equiv\left(\frac{2}{3}-\lambda\right)(-9\lambda)^{\frac{2}{3}}x^{\frac{4}{3}}+\lambda-Bx^{2\lambda-2}=0,$$

また $Bx^{2\lambda-2}$ を消去すれば

$$K(x)\equiv\left(\frac{5}{3}-\lambda\right)(-9\lambda)^{\frac{2}{3}}x^{\frac{4}{3}}-(1-\lambda)+Ax^{2\lambda}=0.$$

共通根 $M>0$ をもつと仮定すれば，$B>0$ より

$$M>\left(\frac{(-9\lambda)^{\frac{1}{3}}}{3(2-3\lambda)}\right)^{\frac{3}{4}}\equiv\left(\frac{-3\lambda}{2-3\lambda}\right)^{\frac{3}{4}}(-9\lambda)^{-\frac{1}{2}},$$

また $A>0$ より　$\left(\frac{3-3\lambda}{5-3\lambda}\right)^{\frac{3}{4}}(-9\lambda)^{-\frac{1}{2}}>M.$

共通根 M を A の関数と考えれば $K(x)=0$ から，Mは一意的に定まり　かつ A の減少関数となることがわかる．M は Bの関数とも考えられる。しかし M は Bの増加関数となることが確められる．故に A,Bのとりうる値は

$$0<A<\frac{2}{2-3\lambda}\left(\frac{(-9\lambda)^{\frac{1}{3}}}{3(2-3\lambda)}\right)^{-\frac{3\lambda}{2}},$$

$$\frac{2}{5-3\lambda}\left(\frac{3-3\lambda}{5-3\lambda}\right)^{\frac{3-3\lambda}{2}}(-9\lambda)^{-1+\lambda}>B>0,$$

このとき 共通根 M は次の不等式を満足しなければならない

$$\left(\frac{3-3\lambda}{5-3\lambda}\right)^{\frac{3}{4}}(-9\lambda)^{-\frac{1}{2}}>M>\left(\frac{-3\lambda}{2-3\lambda}\right)^{\frac{3}{4}}(-9\lambda)^{-\frac{1}{2}}.$$

逆に上の不等式をみたす M の値に対しては，

$$\left(\frac{2}{3}-\lambda\right)(-9\lambda)^{\frac{2}{3}}M^{\frac{4}{3}}+\lambda>0,\ \left(\frac{5}{3}-\lambda\right)(-9\lambda)^{\frac{2}{3}}M^{\frac{4}{3}}-(1-\lambda)>0$$

となる．したがって $H(M)=0$，$K(M)=0$ となるように $A>0$，$B>0$ は一意的に定まり，かつ上記の不等式をみたすことがわかる．

共通根 M としてどんな値が最適であるかはよくわからないが，ここでは $A>0$ は十分小さいと考えて，$K(x)=0$ の根 M を，摂動法により求めれば，次の収束展開式で与えられる：

$$M=\left(\frac{3-3\lambda}{5-3\lambda}\right)^{\frac{3}{4}}(-9\lambda)^{-\frac{1}{2}}\left\{1-\frac{3}{4}\frac{1}{1-\lambda}\left(\frac{3-3\lambda}{5-3\lambda}\right)^{\frac{3\lambda}{2}}(-9\lambda)^{-\lambda}A+\cdots\right\}$$

$\cdots$ は $\left(\frac{3-3\lambda}{5-3\lambda}\right)^{\frac{3\lambda}{2}}(-9\lambda)^{-\lambda}A$ のベキ級数．

このとき $H(M)=0$ より，B は次の展開式で表わされる：

$$B=\frac{2}{5-3\lambda}\left(\frac{3-3\lambda}{5-3\lambda}\right)^{\frac{3-3\lambda}{2}}(-9\lambda)^{-1+\lambda}\left\{1-\frac{5-3\lambda}{2}\left(\frac{3-3\lambda}{5-3\lambda}\right)^{\frac{3\lambda}{2}}(-9\lambda)^{-\lambda}A+\cdots\right\}.$$

$1°$ $\underline{\omega}_1(x)=(-9\lambda)^{\frac{2}{3}}x^{\frac{4}{3}}$ は $0<x<(-9\lambda)^{-\frac{1}{2}}$ において不等式 $\underline{\omega}_1''(x)>f(x,\underline{\omega}_1(x),\underline{\omega}_1'(x))$ を満足することがわかるから，$0<x\leqq M+\varepsilon$ において不等式

$$\underline{\omega}_1''(x)>f(x,\underline{\omega}_1(x),\underline{\omega}_1'(x))$$

は満足される。

$2°$ $\underline{\omega}_2(x)=1-Ax^{2\lambda}-Bx^{2\lambda-2}$ が $\underline{\omega}_2''(x)>f(x,\underline{\omega}_2(x),\underline{\omega}_2'(x))$ を満足するためには次の不等式が成立すればよい：

$$(\#)\quad (1-\lambda)(3-2\lambda)B < \left(\frac{2B}{\sqrt{1-Ax^{2\lambda}-Bx^{2\lambda-2}}} + \lambda(1-2\lambda)A\right)x^2 .$$

この不等式は $M\leqq x<\infty$ において成立すれば連続性により $M-\varepsilon\leqq x<\infty$ において満足されることになる. 不等式(*)は上記の不等式が $x=M$ において成り立つための条件である. じっさい B, $x=M$ の代わりに A による展開式を代入し, (*)の両辺の主要項を比較すればすぐにわかることである. 不等式(#)の右辺の導関数の零点を S とすれば,

$$S=\left(\frac{3-\lambda}{5-3\lambda}\right)^{\frac{1}{2-2\lambda}}\left(\frac{3-3\lambda}{5-3\lambda}\right)^{\frac{3}{4}}(-9\lambda)^{-\frac{1}{2}}\left\{1-\cdots\right\}$$

となる. しかるに $S<M$ であるから, (#)の右辺は $M\leqq x<\infty$ において x の単調増加関数である. よって $-\frac{3}{2}\lambda(3-2\lambda)(5-3\lambda)<1$ なる λ の値にたいしては (#) は $M\leqq x<\infty$, したがって $\underline{\omega}_2''>f(x,\underline{\omega}_2,\underline{\omega}_2')$ は $M-\varepsilon\leqq x<\infty$ において満足されることになる.

2° $\overline{\omega}_3(x)=1-Ax^{2\lambda}+Ax^{2\lambda-2}$ は, $\left(\frac{3-5\lambda+2\lambda^2}{2-\lambda+2\lambda^2}\right)^{\frac{1}{2}}<x<\infty$ において, $\overline{\omega}_3''<f(x,\overline{\omega}_3,\overline{\omega}_3')$ を満足することは容易に確められる. 一方 $y=\overline{\omega}_3(x)$ は $x=\left(\frac{1-\lambda}{-\lambda}\right)^{\frac{1}{2}}$ において最小値(極小値)をとることもわかる. このときの最小値は

$$\overline{\omega}_3\left(\sqrt{\frac{1-\lambda}{-\lambda}}\right)=1-\frac{1}{1-\lambda}\left(\frac{1-\lambda}{-\lambda}\right)^{\lambda}A.$$

$-1<\lambda<0$ ならば $$\left(\frac{3-5\lambda+2\lambda^2}{2-\lambda+2\lambda^2}\right)^{\frac{1}{2}} < \left(\frac{1-\lambda}{-\lambda}\right)^{\frac{1}{2}}$$

が成り立つ。よって 不等式(*)をみたす λ の値に対して(頁の)

$\overline{\omega}_3(x)$ は, $N_2 \equiv \left(\frac{1-\lambda}{-\lambda}\right)^{\frac{1}{2}}$ とおくとき, $N_2-\varepsilon \leqq x < \infty$

において $\overline{\omega}_3''(x) < f(x, \overline{\omega}_3(x), \overline{\omega}_3'(x))$ をみたす。

3° $\overline{\omega}_2(x) \equiv const = D$ は $0<D<1$ なる限り, 任意の x に対して $\overline{\omega}_2'' < f(x, \overline{\omega}_2, \overline{\omega}_2')$ を満足する。故に,

$$D = 1 - \frac{1}{1-\lambda}\left(\frac{1-\lambda}{-\lambda}\right)^{\lambda} A$$

とおけば,

$$\overline{\omega}_2(x) = \overline{\omega}_3(x),\ \overline{\omega}_2'(x) = \overline{\omega}_3'(x) \quad \text{at } x = N_2,$$
$$\overline{\omega}_2(x) < \overline{\omega}_3(x) \quad \text{for } N_2-\varepsilon \leqq x < N_2.$$

4° $\overline{\omega}_1(x) = C^2 x^{2\sigma}$, $0<2\sigma<1$, は, $0<x\leqq\left(\frac{\sigma(1-2\sigma)C}{2(\sigma-\lambda)}\right)^{\frac{1}{2-\sigma}}$ において, $\overline{\omega}_1''(x) < f(x, \overline{\omega}_1(x), \overline{\omega}_1'(x))$ を満足することは すぐ確められる. $N_1 = \left(\frac{\sigma(1-2\sigma)C}{2(\sigma-\lambda)}\right)^{\frac{1}{2-\sigma}}$ とおき, C を

$\overline{\omega}_1(N_1) = \overline{\omega}_2(N_1)$, すなわち $\overline{\omega}_1(N_1) = 1 - \frac{1}{1-\lambda}\left(\frac{1-\lambda}{-\lambda}\right)^{\lambda} A$ となるように定めれば, N_1 および C^2 の値は最初にあげた値となる. 連続性によって $\overline{\omega}_1''(x) < f(x, \overline{\omega}_1(x), \overline{\omega}_1'(x))$ は $0<x\leqq N_1+\varepsilon$ において成り立つことになる。

$5°$ $\overline{\Omega}(x,y)=F\frac{y}{x}$ とおけば

$$f(x,y,\overline{\Omega}(x,y))-\overline{\Omega}_x(x,y)-\overline{\Omega}_y(x,y)\overline{\Omega}(x,y)=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{y}}(2Fy+4\lambda(1-y))-(F^2-F)\frac{y}{x^2}$$

となる. $F>1$ ならば右辺の y に関する偏導関数は負である. よって $f(x,y,\overline{\Omega})-\overline{\Omega}_x-\overline{\Omega}_y\overline{\Omega}$ は, 各 x の値に対して, y の単調減少関数となる。 $F>\frac{4}{3}$ にとれば, §3 の存在定理に仮定された $\overline{\Omega}(x,y)$ に関する すべての条件は満足される。

$\underline{\Omega}(x,y)=0$ であるから, これに対しては §3 のなかで示された条件が満足されることは 簡単に確められる。

§6 境界層の方程式 (Exponential Type)

方程式は, 前§における と同様に,

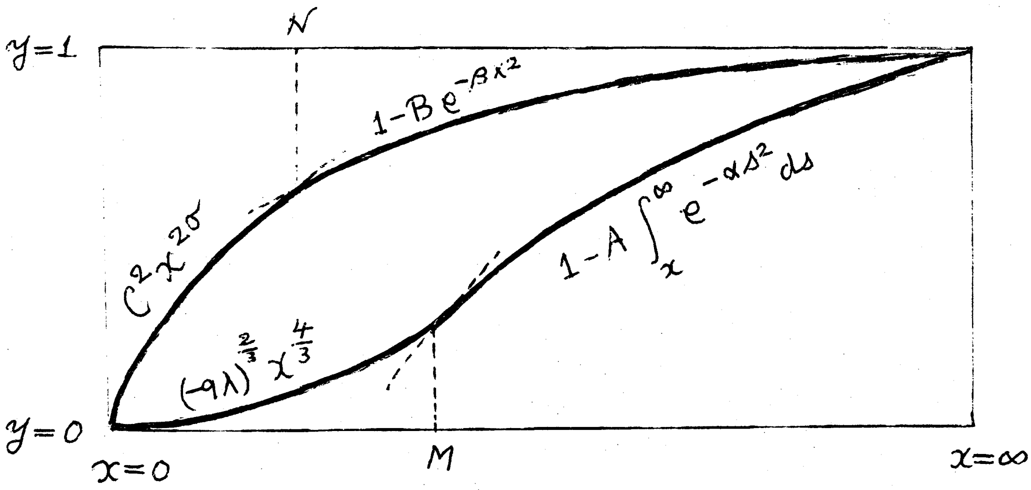
$$y''=-\frac{1}{\sqrt{y}}(2xy'+4\lambda(1-y))\equiv f(x,y,y')$$

$$y(0)=0,\qquad y(\infty)=1$$

$$0<y(x)<1\quad \text{for}\quad 0<x<\infty$$

の形をもつ.

$-0.059\leq\lambda<0$ と仮定する。このとき $\underline{\omega}(x),\overline{\omega}(x)$, $0<x<\infty$, を図示すれば次のようになる.



“ $$\underline{\omega}_1(x) = (-9\lambda)^{\frac{2}{3}} x^{\frac{4}{3}} \qquad \text{for } 0 < x \leqq M+\varepsilon$$

$$\underline{\omega}_2(x) = 1 - A\int_x^\infty e^{-\alpha s^2} ds\,, \qquad \text{for } M-\varepsilon \leqq x < \infty$$

$$\overline{\omega}_1(x) = C^2 x^{2\sigma} \qquad \text{for } 0 < x \leqq N+\varepsilon,$$

$$\overline{\omega}_2(x) = 1 - B e^{-\beta x^2} \qquad \text{for } N-\varepsilon \leqq x < \infty$$

$$\overline{\Omega}(x,y) = F\,\frac{y}{x}$$

$$\underline{\Omega}(x,y) = 0.$$

ここで σ は $0 < 2\sigma < 1$ なる任意の数.

$\alpha = \dfrac{1}{3}$,

$\beta > \dfrac{2(\sigma-\lambda)(1-\sigma)^{\frac{1}{2}}}{\sigma(1-2\sigma)}$

M は x の超越方程式の正根；

$$g(x) \equiv x^{\frac{4}{3}} - (-9\lambda)^{-\frac{2}{3}} + \frac{4}{3} x^{\frac{1}{3}} \ e^{\frac{x^2}{3}} \int_x^{\infty} e^{-\frac{s^2}{3}} ds = 0.$$

Aは次式で与えられる：

$$A = \frac{4}{3}(-9\lambda)^{\frac{2}{3}} M^{\frac{1}{3}} e^{\frac{M^2}{3}} = \left(1 - (-9\lambda)^{\frac{2}{3}} M^{\frac{4}{3}}\right)\left(\int_M^{\infty} e^{-\frac{1}{3}s^2} ds\right)^{-1}.$$

また

$$N = \left(\frac{1-\sigma}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$C^2 = \left(\frac{\beta}{1-\sigma}\right)^{\sigma}(1-\sigma)$$

$$B = \sigma e^{1-\sigma},$$

Fは次の四つの不等式を同時にみたす数：

$$F > \frac{4}{3}\ ; \quad F > A\sqrt{3}\,e^{-1}(-9\lambda)^{-\frac{2}{3}} M^{-\frac{4}{3}}\ ;$$

$$F > -2\lambda\left((-9\lambda)^{-\frac{2}{3}} M^{-\frac{4}{3}} - 1\right);\ F > \frac{2\sigma}{1-\sigma} e^{-\sigma}.$$

λが $-0.059 \leqq \lambda < 0$ を満足するならば，§3の存在定理のなかで仮定されたすべての条件は満足される"

λに関する表記の制限がどのようにしてえられたかを説明する。そうすれば $\alpha = \frac{1}{3}$ となる理由も明らかになる。

1° 二つの曲線 $y = \omega_1(x)$, $y = \omega_2(x)$ が接するように A を定める。接するための条件は，接点の x座標Mが方程式

$$g(x) \equiv x^{\frac{4}{3}} - (-9\lambda)^{-\frac{2}{3}} + \frac{4}{3} x^{\frac{1}{3}} e^{\alpha x^2} \int_x^\infty e^{-\alpha s^2} ds = 0$$

の根となることである。しかるに

$$g'(x) = \left(\frac{8\alpha}{3} x^{\frac{4}{3}} + \frac{4}{9} x^{-\frac{2}{3}}\right) e^{\alpha x^2} \int_x^\infty e^{-\alpha s^2} ds > 0$$

であるから、$g(x) = 0$ は ただ一つの正根 M をもつ。
$g((-9\lambda)^{-\frac{1}{2}}) > 0$，$g(0) < 0$ であるから，

$$M < (-9\lambda)^{-\frac{1}{2}}.$$

正根を計算することはむづかしいから，M の下端を求めることにする。不等式

$$(*) \qquad e^{\alpha x^2} \int_x^\infty e^{-\alpha s^2} ds \leqq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

を利用すれば，M は

$$h(x) \equiv x^{\frac{4}{3}} - (-9\lambda)^{-\frac{2}{3}} + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\, x^{\frac{1}{3}} = 0$$

のただ一つの正根よりも 大きい ことがわかる。

Mがきまれば，A は自動的に定まる。

2° $\omega_1(x) = (-9\lambda)^{\frac{2}{3}} x^{\frac{4}{3}}$ は，$0 < x < (-9\lambda)^{-\frac{1}{2}}$ において，
したがって $0 < x \leqq M + \varepsilon$ において

$$\omega_1''(x) > f(x, \omega_1(x), \omega_1'(x))$$

を満足することは 容易に確められる。

3° λ が $-0.059 \leqq \lambda < 0$ をみたすならば，$\alpha = \frac{1}{3}$ に

とれば　$\underline{\omega}_2(x) = 1 - A\int_x^\infty e^{-\alpha s^2}ds$　は，$M-\varepsilon \leqq x < \infty$ において　$\underline{\omega}_2''(x) > f(x, \underline{\omega}_2(x), \underline{\omega}_2'(x))$　をみたすことを証明する。

このために　$\underline{\omega}_2(x)$ が $\underline{\omega}_2'' > f(x, \underline{\omega}_2, \underline{\omega}_2')$ を満足するための条件を求める。この不等式が成立するのは，x が

$$-2\lambda\, e^{\alpha x^2}\int_x^\infty e^{-\alpha s^2}ds < x\left\{1-\alpha\left(1-A\int_x^\infty e^{-\alpha s^2}ds\right)^{\frac{1}{2}}\right\}$$

を満足するときに限ることが，直接計算によってわかる。後者の不等式は十分大きい x に対して成立つことは，$\alpha<1$ なる限り自明である，その範囲を正確に求めることはできないように思われる。そこで前頁の不等式(*)を用いればすぐわかるように，不等式

$$-\lambda\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \leqq x(1-\alpha)$$

を満足する x は上記の不等式をみたす。x のこの範囲をできるだけ広くするために，$0<\alpha<1$ なる α を動かしてみれば $\alpha=\frac{1}{3}$ のとき，上記の区間は

$$-\frac{3\sqrt{3\pi}}{2}\lambda \leqq x < \infty$$

となって　これが最大区間である。このとき

$$-\frac{3\sqrt{3\pi}}{2}\lambda \leqq M$$

となる必要がある。(あるいは十分であると言うほうがより適

かもしれない). この不等式は $h(x)$ が $x=-\frac{3\sqrt{3\pi}}{2}\lambda$ のとき負の値をとれば確かに満足される. かくして λの範囲は, $-0.059 \leqq \lambda < 0$, の制限をうける. これは大雑把な λの範囲であるが, $g(x)$ が $x=-\frac{3\sqrt{3\pi}}{2}\lambda$ のとき負の値をとるという条件を求めるのは容易でないように思われる. 連続性により

$\omega_2(x) = 1 - A\int_x^\infty e^{-\frac{1}{3}s^2}ds$ は, $M-\varepsilon \leqq x < \infty$ において

$$\omega_2'' > f(x, \omega_2, \omega_2')$$

を満足する。

4° C, B は二つの曲線 $y=C^2x^{2\sigma}$, $y=1-Be^{-\beta x^2}$ が接するように定める。その条件は, $C>0, B>0, x>0$ に対して,

$$2\sigma C^2 x^{2\sigma-1} = 2\beta B x e^{-\beta x^2}; \quad C^2 x^{2\sigma} = 1 - Be^{-\beta x^2}$$

が共通根 N をもつことである。これから $Be^{-\beta x^2}$ を消去すれば,

$$k(x) \equiv \beta C^2 x^2 - \beta x^{2-2\sigma} + \sigma C^2 = 0$$

が正根をもてばよいことになる。これが等根をもつように C を定める。そうすれば, 等根 N, パラメーター C, B の値は定理のなかに述べられたものになることがわかる。このとき

$$\overline{\omega}_1(N) = \overline{\omega}_2(N),\quad \overline{\omega}_1'(N) = \overline{\omega}_2'(N),\quad \overline{\omega}_1''(N) = \overline{\omega}_2''(N),\quad \overline{\omega}_1'''(N) > \overline{\omega}_2'''(N)$$

となる。2位の接触をしているが, 最後の不等式は

$$\overline{\omega}_1(x) < \overline{\omega}_2(x),\ N-\varepsilon \leqq x < N;\quad \overline{\omega}_1(x) > \overline{\omega}_2(x),\ N < x \leqq N+\varepsilon$$

となっていることを示す。

5° $\overline{\omega}_1(x)=C^2x^{2\sigma}$ は, $0<x\leqq\left\{\dfrac{\sigma(1-2\sigma)}{2(\sigma-\lambda)}C\right\}^{\frac{1}{2-\sigma}}$ において, 不等式 $\overline{\omega}_1''(x)<f(x,\overline{\omega}_1(x),\overline{\omega}_1'(x))$ をまんぞくすることが直接代入して確められる。C^2の値はすでに定まっているから, それを代入することにより, もし

$$\beta\geqq\frac{2(\sigma-\lambda)(1-\sigma)^{\frac{1}{2}}}{\sigma(1-2\sigma)} \text{ ならば, } \left(\frac{\sigma(1-2\sigma)}{2(\sigma-\lambda)}C\right)^{\frac{1}{2-\sigma}}\geqq N\equiv\left(\frac{1-\sigma}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}}$$

が成立つことがわかる. よって $\overline{\omega}_1(x)$ は, $0<x\leqq N+\varepsilon$ において $\overline{\omega}_1''<f(x,\overline{\omega}_1,\overline{\omega}_1')$ を満足する.

6° $\overline{\omega}_2(x)=1-Be^{-\beta x^2}$ with $B=\sigma e^{1-\sigma}$ は, x が不等式

$$(*)\quad \beta-2\beta^2x^2<\frac{-2\beta x^2-2\lambda}{\sqrt{1-Be^{-\beta x^2}}} \quad \text{or} \quad (※)\quad \frac{1}{2\beta}\,\frac{\beta\sqrt{1-Be^{-\beta x^2}}+2\lambda}{\beta\sqrt{1-Be^{-\beta x^2}}-1}<x^2$$

を満足する範囲において, 不等式 $\overline{\omega}_2''<f(x,\overline{\omega}_2,\overline{\omega}_2')$ をみたすことが, 簡単な計算によってわかる.

不等式(※)の右辺は, x の単調増加関数である。左辺の関数は, 少し計算すればわかるように, $0<-2\lambda\leqq1$ ならば x の単調減少関数, $-2\lambda>1$ ならば x の単調増加関数となる。よって $0<-2\lambda\leqq1$ のときは, $x=N$ において不等式(※)が満足されていれば, $N\leqq x<\infty$, したがって連続性によって $N-\varepsilon\leqq x<\infty$ において(※)は満足されることになる。じつは $\beta>2(1-\sigma+\lambda)(1-\sigma)^{-\frac{1}{2}}(1-2\sigma)^{-1}$ ならば

不等式(※)は $x=N$ において成立つ。λ に関するわれわれの仮定から，$0<-2\lambda\leqq 1$ の場合だけ考えればよいが，ついでに $-2\lambda>1$ の場合を説明しておく。B の決め方から

$$1-B=1-\sigma e^{1-\sigma}>1-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{e}}=1-0.82436>0 \quad \text{for } 0\leqq\sigma<\frac{1}{2}$$

であるから，(※)の左辺の関数は $0\leqq x<\infty$ において $\frac{1}{2B}$ より小さい値しかとらない。右辺は，$N\leqq x<\infty$ において $\frac{1-\sigma}{B}$ より小さい値はとらない。よって $1<2(1-\sigma)$ ならば(※)は $N\leqq x<\infty$ において成立つ。しかるに $1>2\sigma$ であるからたしかに $1<2(1-\sigma)$。したがって $-2\lambda>1$ のときは，B に関する制限なしに不等式(※)は $N-\varepsilon\leqq x<\infty$ において満足される。

7° $f(x,y,\overline{\Omega}(x,y))-\overline{\Omega}_x(x,y)-\overline{\Omega}_y(x,y)\,\overline{\Omega}(x,y)$

$$=-2F\,y^{\frac{1}{2}}-4\lambda(1-y)\,y^{-\frac{1}{2}}-(F^2-F)\,y\,x^{-2}$$

$\equiv \mathcal{F}(x,y)$ とおく

$F>1$ ならば $\frac{\partial}{\partial y}\mathcal{F}(x,y)<0$ をえるから，$\mathcal{F}(x,y)$ は各 x に対して y の単調減少関数となる。したがって

$\mathcal{F}(x,\omega(x))<0$ for $0<x<\infty$ となることが言えればよい。この不等式は F を十分大きくとれば満足されることはすぐわかる。初等的な計算により定理のなかに述べられている4個の不等式が同時に満足されるように F をとればよいのである。

あとがき

いくつかの問題点を指摘しておこう。

§4において，$\nu>1$ のとき $\alpha>1$ となってよさそうであるが，α に関する制限からわかるように，$B\gg1$ であるから α は十分小さくなる。これは M の値を $B\gg1$ のとき摂動法によって求めたからである。M をきめる方程式（p 31）の根をできるだけ正確に計算する方法はないか？ $B\gg1$ の仮定なしに §4 の計算をうまく行う方法はないか？ そうすれば α に関する制限はもっとゆるくなる。

§5において，A の値のとり方を変えることによって，λ の有効な範囲をもっと広くすることはできないか？ $x\to\infty$ のとき $y-1$ が x のベキの order で小さくなると仮定すれば $y\sim\omega_2(x)$（$\sim$ は order が同じことを意味する）でなければならないが，$\omega_2(x)$ のとり方を変えて，せめて物理実験の結果を保証するだけの λ の有効範囲をえることはできないか？ 例えば $0<-2\lambda\leqq1$ なる λ の値に対して有効な関数 $\omega_2(x)$ をみつけることはできないか？

§6において，$g(x)=0$ の根 M を $0<\alpha<1$ なる α の関数として求めることはできないか？ もしこれがうまくできれば，λ のとりうる範囲がもっと広くなって

物理実験の結果が保証されるようなことになるかもしれない.
$\underline{\omega}_2(x)$, $\overline{\omega}_2(x)$ を別の関数でおきかえて, λ の有効な範囲をもっと拡げることはできないか?

まえがき で説明したように 解が存在すれば $x \to 0$ のとき $y(x)/x$ は有限な値をとる。したがって $\overline{\omega}_1(x)$ として, $\overline{\omega}_1(x)/x$ が $x \to 0$ のとき 有限な値になるものはとれないか?

Wasow さんの来日を記念して
1974年 盛夏